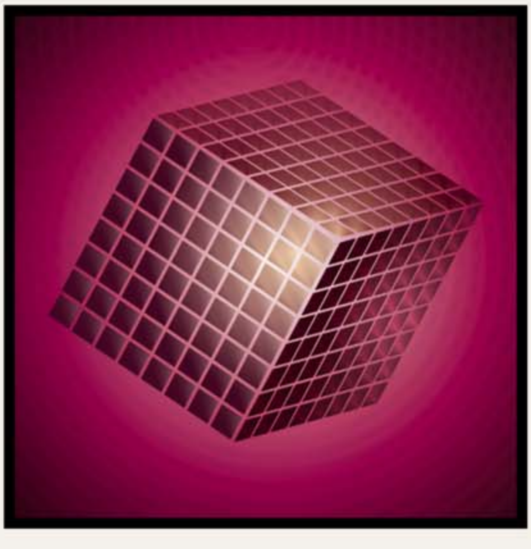
EDICE UČEBNÍCH TEXTŮ

KVANTITATIVNÍ METODY

MATEMATIKA

PRO EKONOMY

KAREL HRACH



VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMIE A MANAGEMENTU

Matematika pro ekonomy

Karel Hrach

Matematika pro ekonomy

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMIE A MANAGEMENTU
Praha 2007

Matematika pro ekonomy

Karel hrach

Vydání první.

ISBN 978-80-86730-09-7

Vysoká škola ekonomie a managementu

www.vsem.cz

Obsah

Jak používat tuto učebnici

Tuto knihu můžete jednoduše přečíst od začátku do konce, ale mnohem užitečnější vám bude s tužkou a papírem. Nejefektivnější formou učení je aktivní učení, a proto jsme naplnili text příklady, abyste se přesvědčili, jak učivo zvládáte. Každá kapitola také obsahuje cíle, souhrn kapitoly a úkoly na procvičení. Následující body vám objasní, jak s knihou pracovat co nejefektivněji:

a) Vyberte si kapitolu, kterou budete studovat, přečtěte si úvod a cíle na začátku kapitoly.

b) Potom si přečtěte souhrn kapitoly na jejím konci (před úkoly na procvičení). Neočekávejte, že tento krátký závěr znamená v této fázi příliš mnoho, ale zkuste, zda můžete spojit některý z probraných bodů s některým z cílů.

c) Poté si přečtěte samotnou kapitolu. Vyřešte jednotlivá cvičení tak, jak jdou za sebou. Největší prospěch ze cvičení získáte, pokud si své odpovědi napíšete předem a poté je porovnáte s řešením.

d) Při čtení používejte poznámkový sloupec a přidávejte vlastní komentáře, odkazy na další materiál atd. Pokuste se formulovat své vlastní názory. V matematice nemusí vést k cíli jediný způsob řešení, je však nutno dobře pochopit všechny souvislosti. Čím hlubší dialog s knihou povedete, tím více ze svého studia získáte.

e) Až dočtete kapitolu, znovu si přečtěte souhrn kapitoly. Poté se vraťte k cílům na začátku kapitoly a položte si otázku, zda jste jich dosáhli.

f) Nakonec upevněte své znalosti tím, že písemně vyřešíte příklady v závěru kapitoly. Své odpovědi si můžete zkontrolovat tak, že se podíváte zpět do textu. Návrat k textu a hledání významných detailů dále zlepší pochopení předmětu.

g) Nakonec si zkontrolujte své výsledky se vzorovým řešením.

Značky a symboly v učebním textu

Struktura distančních učebních textů je rozdílná již na první pohled, a to např. v zařazování grafických symbolů – značek.

Specifické grafické značky umístěné na okraji stránky upozorňují na definice, cvičení, příklady s postupem řešení, klíčová slova a shrnutí kapitol. Značky by měly studenta intuitivně vést tak, aby se již po krátkém seznámení s distanční učebnicí dokázal v textu rychle a snadno orientovat.

Poznámky

Označuje místo pro poznámky (vždy na začátku stránky v širším okraji).

Definice

Upozorňuje na definici nebo poučku pro dané téma.

Příklad

Označuje příklad praktické aplikace učiva včetně řešení.

Tvrzení

Označuje matematická tvrzení – vztahy či řešení doplněné důkazem platnosti.

Cvičení

Označuje úkoly k procvičování s řešením na konci kapitoly.

Klíčová slova

Upozorňuje na důležité výrazy či odborné termíny nezbytné pro orientaci v daném tématu.

Shrnutí kapitoly

Shrnutí kapitoly se zařazuje na konec dané kapitoly. Přehledně, ve strukturovaných bodech, shrnuje to nejpodstatnější z předchozího textu.

1

kapitola

Aritmetické vektory

1. kapitola
Aritmetické vektory

Studium této kapitoly objasní

- Aritmetický vektor je každá uspořádaná n-tice reálných čísel, pro n=1 jde o skalár.
- Rovnost dvou vektorů je posuzována souřadnice po souřadnici.
- Součet dvou vektorů téže dimenze, resp. násobek vektoru jsou realizovány po jednotlivých souřadnicích (složkách) vektoru, výsledkem je vektor téže dimenze.
- Skalární součin dvou vektorů téže dimenze je také realizován po jednotlivých souřadnicích (složkách) vektoru, výsledkem je ovšem skalár.
- Stěžejním pojmem je pojem lineární kombinace, pomocí něj jsou definovány další důležité pojmy – lineární závislost a lineární nezávislost, pomocí nich pak pojem báze.

Cíle kapitoly

- Praktické zvládnutí početních úkonů s aritmetickými vektory.

DEFINICE

Aritmetický vektor

Aritmetický vektor je uspořádaná n-tice čísel (souřadnic, složek), zapsaná do sloupce:

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Zápis v řádku je **transpozice** daného vektoru, značena $\mathbf{a}^T = (a_1,\ldots,a_n)$.

Naopak transpozicí vektoru řádkového je vektor sloupcový: $(\mathbf{a}^T)^T = \mathbf{a}$. Hodnota n je **dimenze** (rozměr) vektoru, příslušné vektory jsou n-rozměrné (n-dimenzionální).

Vektor dimenze 1 se nazývá **skalár**.

Dokud to nebude bezpodmínečně nutné, bude každý (ve skutečnosti sloupcový) vektor zapisován do řádku, tedy např. $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)$.

DEFINICE

Nulový vektor

Nulový vektor **0** je vektor libovolné dimenze, jehož všechny souřadnice jsou rovny nule: $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)$.

DEFINICE

Rovnost

Relace „rovnost“ mezi aritmetickými vektory a operace s nimi:

a) **Rovnost** (dvou vektorů téže dimenze n): $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i = 1\ldots n$

b) **Součet** (dvou vektorů téže dimenze n): $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1,\ldots, a_n + b_n)$

c) **Násobek** (vektoru reálným číslem r): $r\mathbf{a} = (ra_1,\ldots, ra_n)$

d) **Skalární součin** (dvou vektorů téže dimenze n): $\mathbf{ab} = (a_1,\ldots,a_n) \cdot (b_1,\ldots,b_n) = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$

Definice a) říká, že dva vektory se můžou rovnat, jen když mají stejný počet souřadnic a jejich první, druhé atd. souřadnice jsou shodné. (Symbol $\Leftrightarrow$ znamená „právě když “ $\forall$ znamená „pro každý prvek“.) Definice b) definuje součet dvou vektorů (opět musí být téže dimenze) jako nový vektor, jehož souřadnice vzniknou jako součet prvních, druhých atd. souřadnic. Definice c) definuje r-násobek vektoru jako nový vektor, jehož první, druhá atd. souřadnice je r-násobkem souřadnic původních. Definice d) definuje skalární součin dvou vektorů téže dimenze (n) jako součet součinů prvních, druhých atd. souřadnic, výsledkem tedy není n-rozměrný vektor, ale vždy skalár (hodnota).

PŘÍKLAD 001

Mějme vektory $\mathbf{a} = (4,-3,1)$, $\mathbf{b} = (5,6,-7)$. Vypočtěme vektor $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ a hodnotu $\mathbf{ab}$.

Řešení:

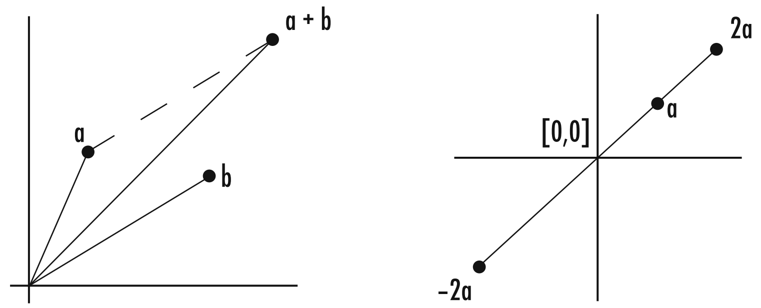
$$2\mathbf{b} = 2 \cdot (5,6,-7) = (2 \cdot 5,\ 2 \cdot 6,\ 2 \cdot (-7)) = (10,12,-14), \text{ takže}$$

$$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (4,-3,1) + (10,\ 12,-14) = (14,\ 9,-13).$$

$$\mathbf{ab} = (4,-3,1) \cdot (5,6,-7) = 4 \cdot 5 + (-3) \cdot 6 + 1 \cdot (-7) = 20 + (-18) + (-7) = -5.$$

Vektory jsou v praxi využívány jako souhrnný záznam více údajů, např. vektor informací o každé firmě může po dohodě jako první souřadnici obsahovat údaj počet zaměstnanců, jako druhou souřadnici celkem vyplacenou částku na sociálním pojistném, a tak podobně. V případě dvourozměrných vektorů (méně často i třírozměrných) bývá obvyklé jejich grafické znázorňování: první souřadnici vynášíme na osu x, druhou na osu y (případně třetí na osu z). Vektor je pak reprezentován svým koncovým bodem vyneseným v rovině (prostoru). Také operace součet vektorů či násobek vektoru lze graficky znázornit. Součtu $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ odpovídá posun koncového bodu $\mathbf{a}$ o vektor $\mathbf{b}$ podle schématu znázorněného na obrázku 1.1 (vlevo), r-násobek vektoru znamená protažení vektoru (ve směru přímky procházející jeho původním koncovým bodem a počátkem) tak, aby vzdálenost nového koncového bodu od počátku [0,0] byla r-násobkem vzdálenosti původní, viz obrázek 1.1 (vpravo). Jen pro zajímavost: platí, že dva vektory $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ jsou na sebe kolmé, právě když $\mathbf{ab} = 0$.

OBRÁZEK 1.1 Součet dvou vektorů (vlevo), 2-násobek, resp. –2-násobek vektoru a (vpravo)



TVRZENÍ:

Vlastnosti operací s aritmetickými vektory.

a) Sčítání vektorů je komutativní operací, pro každou dvojici vektorů téže dimenze platí: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$.

b) Pro sčítání vektorů (téže dimenze) platí asociativita, tj. $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

c) Pro nulový vektor (se stejnou dimenzí jako vektor $\mathbf{a}$) platí: $\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

d) Pro nulový vektor a pro libovolné reálné r platí: $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Důkaz:

a) Pro každou souřadnici platí komutativnost „obyčejných“ čísel, tedy:

$a_1+b_1 = b_1+a_1,\ldots, a_n+b_n = b_n+a_n$.

b) Pro každou souřadnici platí asociativita „obyčejných“ čísel, tedy:

$a_1+b_1+c_1 = (a_1+b_1)+c_1 = a_1+(b_1+c_1), \ldots, a_n+b_n+c_n = (a_n+b_n)+c_n = a_n+(b_n+c_n)$.

c) Pro každou souřadnici platí: $a_1+0 = 0+a_1 = a_1,\ldots, a_n+0 = 0+a_n = a_n$.

d) Pro každou souřadnici platí: $r \cdot 0 = 0$.

DEFINICE

Mějme s vektorů $\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_s$, každý z nich dimenze n. Zvolme libovolná reálná čísla $r_1,\ldots,r_s$.

Vektor $\mathbf{v} = r_1\mathbf{v}_1 + \ldots + r_s\mathbf{v}_s = \sum_{i=1}^{s} r_i\mathbf{v}_i$ je **lineární kombinace** vektorů $\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_s$,

přičemž hodnoty $r_1,\ldots, r_s$ jsou **koeficienty** této lineární kombinace.

PŘÍKLAD 002

Mějme dva trojrozměrné vektory (s = 2, n = 3): $\mathbf{v}_1 = (4, -3, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (5, 6, -7)$. Jak vypadá jejich lineární kombinace s koeficienty:

a) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$,

b) $r_1 = r_2 = 0$?

Řešení:

a) Při této volbě koeficientů jde vlastně o stejné zadání jako v příkladu 001:

$$1 \cdot (4, -3, 1) + 2 \cdot (5, 6, -7) = (4, -3, 1) + (10, 12, -14) = (14, 9, -13).$$

b) Při této volbě koeficientů je výslednou lineární kombinací nulový vektor:

$$0 \cdot (4, -3, 1) + 0 \cdot (5, 6, -7) = (0, 0, 0) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

DEFINICE

Kombinace vektorů

Budiž lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ (s koeficienty $r_1, \ldots, r_s$) vektor nulový. Pokud $r_1 = \ldots = r_s = 0$, jde o **triviální nulovou lineární kombinaci**. Pokud pro i = 1,…,s $\exists i$: $r_i \neq 0$ (pokud je aspoň jeden koeficient nenulový), jde o **netriviální nulovou lineární kombinaci**.

PŘÍKLAD 003

Mějme tři čtyřrozměrné vektory (s = 3, n = 4): $\mathbf{v}_1 = (2, 0, -4, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 7, 8, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -2, 0)$. Určete jejich lineární kombinaci s koeficienty $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, $r_3 = -2$.

Řešení:

$$1 \cdot (2, 0, -4, 0) + 0 \cdot (3, 7, 8, 0) + (-2) \cdot (1, 0, -2, 0) = (2, 0, -4, 0) + (0, 0, 0, 0) + (-2, 0, 4, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

Uvedené koeficienty byly příkladem netriviální nulové lineární kombinace daných vektorů.

Je evidentní, že triviální nulová lineární kombinace existuje vždy. Jak je to ale s existencí netriviální nulové lineární kombinace? Našli bychom ji i pro vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ z příkladu 002? A pokud existuje, jak najít příslušné koeficienty? Místo odpovědí na tyto otázky bude prozatím pojem nulová lineární kombinace využit v rámci následující definice.

DEFINICE

Vektory téže dimenze

Vektory téže dimenze (n) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ jsou **lineárně závislé**, právě když existuje (alespoň jedna) jejich netriviální nulová lineární kombinace. Naopak jsou **lineárně nezávislé**, právě když neexistuje jejich netriviální nulová lineární kombinace (jinak řečeno, když jediná jejich existující nulová lineární kombinace je ta triviální).

Teď tedy můžeme na otázku „Kdy existuje pro vektory jejich netriviální nulová lineární kombinace?“ odpovědět „jsou-li tyto vektory lineárně závislé“. Stále však nevíme, jak tuto situaci vlastně poznat, natož jak najít příslušné koeficienty $r_1, \ldots, r_s$. Kompletní odpověď na tyto otázky bude známa po objasnění problému řešitelnosti (a vyřešení) tzv. homogenní soustavy rovnic s neznámými $r_1,\dots,r_s$. Pokud budeme chtít zjistit, zda existují koeficienty $r_1,\dots,r_s$ (a jakou mají hodnotu) tak, aby výslednou lineární kombinací byl nějaký konkrétní nenulový vektor **v**, poslouží k tomuto účelu znalost řešitelnosti (a vyřešení) tzv. nehomogenní soustavy rovnic s neznámými $r_1,\dots,r_s$.

TVRZENÍ:

Kritérium lineární závislosti dvojice vektorů.

Zkoumáme-li pouze dvojici ($s = 2$) n-rozměrných vektorů, pak ty jsou lineárně závislé, právě když jeden je r-násobkem druhého.

Důkaz:

V důkazu bude používán symbol $\Leftrightarrow$ ve významu ekvivalence (tj. „právě když“). Platí: Podle definice jsou $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ lineárně závislé $\Leftrightarrow$ existují r_1, r_2 tak, že aspoň jeden z nich je nenulový a platí: $r_1\mathbf{v}_1+r_2\mathbf{v}_2= \mathbf{0}$, aneb po úpravě $r_1\mathbf{v}_1=-r_2\mathbf{v}_2$. Předpokládejme, že tím nenulovým koeficientem je r_1 (r_2 může, ale nemusí být nula). Pak lze hodnotou r_1 vydělit a dostaneme: $\mathbf{v}_1= r\mathbf{v}_2$ (kde $r = -r_2/r_1$), aneb $\mathbf{v}_2$ je r-násobek $\mathbf{v}_1$, což jsme ale chtěli dokázat. (Zcela analogicky důkaz dokončíme, pokud by nenulové bylo naopak pouze r_2.)

PŘÍKLAD 004

Nyní již můžeme zodpovědět otázku, zda existuje netriviální nulová lineární kombinace pro vektory $\mathbf{v}_1 = (4,-3,1)$, $\mathbf{v}_2 = (5,6,-7)$ z příkladu 002. Musíme si odpovědět na otázku, zda lze nalézt hodnotu r tak, aby platilo zároveň $5 = 4r$ (r-násobek první souřadnice), $6 = -3r$ (r-násobek druhé souřadnice) a přitom $-7 = 1r$ (r-násobek třetí souřadnice). Evidentně ne, takže vektor $\mathbf{v}_2$ není r-násobkem vektoru $\mathbf{v}_1$, tudíž tyto dva vektory nejsou lineárně závislé (jsou lineárně nezávislé), aneb neexistuje jejich netriviální nulová lineární kombinace.

Vlastnosti obsažené v následujících dvou tvrzeních (zejména v tvrzení o lineárně nezávislých vektorech) budou využity při řešení soustav rovnic, kde umožní definovat úpravy vedoucí k nalezení řešení.

TVRZENÍ:

Vlastnosti lineárně závislých vektorů.

a) Vektory $\mathbf{0},\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$ jsou vždy lineárně závislé.

b) Vektory $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_s$ jsou vždy lineárně závislé.

c) Jsou-li $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$ lineárně závislé, jsou lineárně závislé i vektory $\mathbf{0},\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_{s+1}$.

d) Jsou-li $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$ lineárně závislé, pak aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.

Důkaz:

Důkazy všech částí a) až d) plynou přímo z definic pojmů lineární závislost a lineární kombinace.

1. Pro libovolné (i nenulové) r platí: $r \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$, takže lineární kombinace vektorů $\mathbf{0},\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$ s koeficienty $r,0,\dots,0$ je (při $r \neq 0$) netriviální nulovou lineární kombinací, což jinak řečeno znamená, že vektory $\mathbf{0},\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$ jsou lineárně závislé.
2. Pro libovolné (i nenulové) r platí: $r \cdot \mathbf{v}_1 + (-r) \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$, takže lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_s$ s koeficienty $r,-r, 0,\dots, 0$ je (při $r \neq 0$) netriviální nulovou lineární kombinací, což jinak řečeno znamená, že vektory $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_s$ jsou lineárně závislé.

3. Jsou-li vektory $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$ lineárně závislé, musí existovat jejich netriviální nulová lineární kombinace s koeficienty $r_1, r_2,\dots,r_s$ (tj. $r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_s\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$). Po přidání jakéhokoli vektoru $\mathbf{v}_{s+1}$ bude ovšem lineární kombinace s koeficienty $r_1 r_2,\dots,r_s,0$ také nulová:

$$r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_s\mathbf{v}_s + 0\mathbf{v}_{s+1} = (r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_s\mathbf{v}_s) + 0\mathbf{v}_{s+1} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

takže existuje netriviální nulová lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_{s+1}$, tj. tyto jsou lineárně závislé.

4. Jsou-li vektory $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$ lineárně závislé, musí existovat jejich netriviální nulová lineární kombinace $r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_s\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$, v níž aspoň jeden z koeficientů je nenulový. Předpokládejme, že tím nenulovým koeficientem je r_1 (je-li to jiný z koeficientů, následující úvaha je analogická). Pak po převodu na tvar $r_1\mathbf{v}_1 = (-r_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (-r_s)\mathbf{v}_s$ můžeme nenulovou hodnotou r_1 dělit, takže $\mathbf{v}_1 = (-r_2/r_1)\mathbf{v}_2 + \dots + (-r_s/r_1)\mathbf{v}_s$, aneb jeden z vektorů (zde $\mathbf{v}_1$) je skutečně lineární kombinací vektorů ostatních ($\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_s$), a to lineární kombinací s koeficienty $-r_2/r_1,\dots,-r_s/r_1$.

Výklad jednotlivých částí právě dokázaného tvrzení je následující:

a) Skupina vektorů, z nichž jeden je nulový, je vždy skupinou lineárně závislých vektorů.

b) Skupina vektorů obsahující aspoň dva shodné vektory (zde označeny $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1$, přičemž ale nemusí jít vždy nutně o první vektor) je vždy skupinou lineárně závislých vektorů.

c) Je-li nějaká skupina vektorů skupinou vektorů lineárně závislých, pak přidáním jakéhokoliv vektoru se na tomto faktu nic nezmění.

d) Zde pouze upozornění, že zmíněnou vlastnost (být lineární kombinací ostatních vektorů) nemusí mít každý z vektorů $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$, tvrzení zní, že tuto vlastnost má aspoň jeden z nich.

TVRZENÍ:

Vlastnosti lineárně nezávislých vektorů.

Jsou-li $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$ lineárně nezávislé, pak:

a) žádný z nich není nulový,

b) každé dva jsou navzájem různé,

c) žádný není lineární kombinací ostatních,

d) každá jejich podskupina je také skupinou lineárně nezávislých vektorů,

e) pokud $q \neq 0$, též $q\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_s$ jsou lineárně nezávislé,

f) $\mathbf{v}_1 + q_2\mathbf{v}_2 + \dots + q_s\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_s$ jsou také lineárně nezávislé.

Důkaz:

Části a) až d) lze dokázat úvahou, že kdyby nebyly pravdivé, je to ve sporu vždy s odpovídající částí tvrzení o lineárně závislých vektorech (jde o ukázku techniky důkazu tzv. sporem). Například podle části a) tvrzení o lineárně závislých vektorech prostě není možné, aby byly vektory $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$ lineárně nezávislé a přitom byl mezi nimi vektor nulový.

e) I toto tvrzení dokážeme sporem: Předpokládejme, že $q\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\dots, \mathbf{v}_s$ jsou naopak lineárně závislé. To by znamenalo, že existují koeficienty $r_1,r_2,\dots,r_s$, pro něž:

$$r_1(q\mathbf{v}_1) + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_s\mathbf{v}_s = (r_1 q)\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_s\mathbf{v}_s = \mathbf{0}.$$

To ale znamená, že také lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_s$ s koeficienty r_1q, $r_2,\dots,r_s$ je netriviální nulovou lineární kombinací, což je ve sporu s předpokladem celého tvrzení, že totiž $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$ byly lineárně nezávislé. Tím byla prokázána nemožnost toho, že by $q\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_s$ mohly být lineárně závislé.

f) Opět důkaz sporem: Předpokládejme, že $\mathbf{v}_1 + q_2\mathbf{v}_2 + \dots + q_s\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_s$ jsou naopak lineárně závislé. To by znamenalo, že existují koeficienty $r_1,r_2,\dots,r_s$, pro něž:

$$r_1(\mathbf{v}_1 + q_2\mathbf{v}_2 + \dots + q_s\mathbf{v}_s) + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_s\mathbf{v}_s =$$

$$= r_1\mathbf{v}_1 + (r_1q_2 + r_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (r_1q_s + r_s)\,\mathbf{v}_s = \mathbf{0}.$$

To ale zároveň znamená, že také lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_s$ s koeficienty r_1, $r_1q_2 + r_2,\dots, r_1q_s + r_s$ je netriviální nulovou lineární kombinací, což je ve sporu s předpokladem celého tvrzení, že totiž $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$ byly lineárně nezávislé. Tím byla prokázána nemožnost toho, že by $\mathbf{v}_1 + q_2\mathbf{v}_2 + \dots + q_s\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_s$ mohly být lineárně závislé.

Výklad jednotlivých částí právě dokázaného tvrzení je následující (části a) až d) byly formulovány slovně, nejsou zde tedy více komentovány).

e) Pokud kterýkoli (ne nutně zrovna první) z lineárně nezávislých vektorů vynásobíme nenulovou konstantou, vektory zůstanou lineárně nezávislé.

f) Pokud kterýkoli (ne nutně zrovna první) z lineárně nezávislých vektorů upravíme tak, že k němu přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních (v tvrzení je vektor $\mathbf{v}_1$ nahrazen vektorem $\mathbf{v}_1 + q_2\mathbf{v}_2 + \dots + q_s\mathbf{v}_s$), vektory zůstanou lineárně nezávislé.

DEFINICE

Pokud se pro n-rozměrné vektory podaří najít n-tici lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$, pak tyto vektory tvoří tzv. bázi n-rozměrného vektorového prostoru a nazýváme je bazické vektory.

TVRZENÍ:

Význam báze n-rozměrného vektorového prostoru.

Kterýkoli n-rozměrný vektor lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů příslušné báze.

(Výrazem „příslušná báze“ je míněna báze pro vektory uvažované dimenze n.)

Klíčem k pochopení významu báze je uvědomit si, že její vektory $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ jsou lineárně nezávislé, ale pokud k nim přidáme jakýkoli další n-rozměrný vektor $\mathbf{v}_{n+1}$, vznikne již vždy skupina vektorů lineárně závislých. Jinak řečeno, v n-rozměrném prostoru nelze najít skupinu n + 1 vzájemně lineárně nezávislých vektorů.

PŘÍKLAD 005

Jako klasická ukázka báze poslouží tzv. jednotková báze, která pro n = 2 obsahuje vektory $\mathbf{v}_1 = (1,0)$ a $\mathbf{v}_2 = (0,1)$, pro n = 3 vektory $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0)$ a $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$ atd. Jednoduchost jednotkové báze spočívá v tom, že pro libovolný n-rozměrný vektor je ihned zřejmé, pomocí jaké lineární kombinace bazických vektorů jej lze získat. Například vektor (3,0,–2) získáme jako tuto lineární kombinaci bazických vektorů:

$$3 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + (-2) \cdot (0,0,1) = (3,0,0) + (0,0,0) + (0,0,-2) = (3,0,-2),$$

tedy jako lineární kombinaci s koeficienty 3,0,–2. Obecně platí, že vektor (x,y,z) vznikne jako lineární kombinace vektorů jednotkové báze s koeficienty x,y,z.

Shrnutí kapitoly

- Aritmetický vektor je každá uspořádaná n-tice reálných čísel, pro $n = 1$ jde o skalár.
- Rovnost dvou vektorů je posuzována souřadnice po souřadnici.
- Součet dvou vektorů téže dimenze, resp. násobek vektoru, jsou realizovány po jednotlivých souřadnicích (složkách) vektoru, výsledkem je vektor téže dimenze.
- Skalární součin dvou vektorů téže dimenze je také realizován po jednotlivých souřadnicích (složkách) vektoru, výsledkem je ovšem skalár.
- Stěžejním pojmem je pojem lineární kombinace, pomocí něj jsou definovány další důležité pojmy – lineární závislost a lineární nezávislost, pomocí nich pak pojem báze.

Klíčová slova

Skalární součin

Lineární kombinace

Lineární závislost

Lineární nezávislost

Báze

Úkoly na procvičení

Příklad 1:

Pro dvojici vektorů vypočtěte hodnotu skalárního součinu:

a) $\mathbf{a} = (2,-2,0)$, $\mathbf{b} = (3,0,-4)$ b) $\mathbf{v} = (2,0,-6)$, $\mathbf{w} = (-3,0,9)$

Řešení:

a) $\mathbf{ab} = (2,-2,0) \cdot (3,0,-4) = 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-4) = 6 + 0 + 0 = 6.$

b) $\mathbf{vw} = (2,0,-6) \cdot (-3,0,9) = 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 + (-6) \cdot 9 = -6 + (-54) = -60.$

Příklad 2:

Pro vektory $\mathbf{a} = (2,-2,0)$, $\mathbf{b} = (3,0,-4)$ sestrojte jejich lineární kombinaci s koeficienty:

a) 0 a 0 b) 0 a 1 c) 1 a 1 d) 2 a –1

Řešení:

a) $0 \cdot (2,-2,0) + 0 \cdot (3,0,-4) = (0,0,0) + (0,0,0) = (0,0,0)$

(triviální nulová lineární kombinace)

b) $0 \cdot (2,-2,0) + 1 \cdot (3,0,-4) = (0,0,0) + (3,0,-4) = (3,0,-4)$

(výsledkem musí být vektor **b**)

c) $1 \cdot (2,-2,0) + 1 \cdot (3,0,-4) = (2,-2,0) + (3,0,-4) = (5,-2,-4)$

(výsledkem musí být součet **a** + **b**)

d) $2 \cdot (2,-2,0) + (-1) \cdot (3,0,-4) = (4,-4,0) + (-3,0,4) = (1,-4,4)$

Příklad 3:

Pro dvojici vektorů rozhodněte, zda jsou lineárně závislé či nezávislé a případně nalezněte koeficienty jejich netriviální nulové lineární kombinace:

a) $\mathbf{a} = (2,-2,0)$, $\mathbf{b} = (3,0,-4)$ b) $\mathbf{v} = (2,0,-6)$, $\mathbf{w} = (-3,0,9)$

Řešení:

Jelikož jde o dvojici vektorů, lze použít tvrzení: Kritérium lineární závislosti dvojice vektorů.

a) Jeden z vektorů není násobkem druhého, vektory **a** a **b** jsou tudíž lineárně nezávislé a jejich netriviální nulová lineární kombinace neexistuje.

b) Platí, že $\mathbf{w} = (-3/2) \cdot \mathbf{v}$, vektory **v** a **w** jsou tudíž lineárně závislé a jejich netriviální nulová lineární kombinace je například:

$$3 \cdot (2,0,-6) + 2 \cdot (-3,0,9) = (6,0,-18) + (-6,0,18) = (0,0,0) \quad \text{(koeficienty 3 a 2)}$$

$$(-12) \cdot (2,0,-6) + (-8) \cdot (-3,0,9) = (-24,0,72) + (24,0,-72) = (0,0,0) \quad \text{(koeficienty −12 a −8)}$$

V úloze 3b) existuje nekonečně mnoho řešení, uvedený vztah $\mathbf{w} = (-3/2) \cdot \mathbf{v}$ naznačuje, že vyhovovat budou všechny takové dvojice koeficientů, pro něž platí, že jejich hodnoty jsou v poměru 3:2 (viz nalezené dvojice 3 a 2, či −12 a −8). Kompletní řešení tohoto úkolu lze provést nalezením parametrického řešení soustavy lineárních algebraických rovnic (zde konkrétně tří rovnic pro dvě neznámé).

Příklad 4:

Najděte jinou než jednotkovou bázi ve dvourozměrném prostoru a vyjádřete pomocí ní vektory (10,10), (−5,0) a (b_1,b_2).

Řešení (ukázka):

Bází nemůže být například dvojice vektorů (1,0) a (2,0), neboť ty jsou navzájem lineárně závislé (dle tvrzení: Kritérium lineární závislosti dvojice vektorů). Bází ale může být například dvojice vektorů (1,0) a (2,2). Pro ni platí:

$$0 \cdot (1,0) + 5 \cdot (2,2) = (0,0) + (10,10) = (10,10) \quad \text{(hledané koeficienty jsou 0 a 5)}$$

$$(-5) \cdot (1,0) + 0 \cdot (2,2) = (-5,0) + (0,0) = (-5,0) \quad \text{(hledané koeficienty jsou −5 a 0)}$$

Dosud bylo možno postupovat zkusmo. Pro poslední případ obecně zadaného vektoru (b_1,b_2) bude ale vhodnější předvést obecně použitelný postup. Hledané koeficienty označíme jako r_1 a r_2, musí pro ně při dané volbě bazických vektorů platit:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2r_2 \\ 2r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + 2r_2 \\ 2r_2 \end{pmatrix}.$$

Jde o vektorový zápis dvojice rovnic pro dvě neznámé (r_1 a r_2), první rovnice má tvar: $b_1 = r_1 + 2r_2$, druhá rovnice má tvar: $b_2 = 2r_2$. Soustavu lze řešit například středoškolskou dosazovací metodou. Zde ze druhé rovnice ihned plyne: $r_2 = b_2/2$, dosazením do první rovnice a její úpravou dostaneme: $r_1 = b_1 - 2r_2 = b_1 - 2 \cdot b_2/2 = b_1 - b_2$. Hledanými koeficienty jsou tedy popořadě $r_1 = b_1 - b_2$, $r_2 = b_2/2$.